

# Corso di Teoria dei Segnali

## a.a. 2010-2011

Esercitazione n. 2 – Sviluppo in serie e trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{w(t)} \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{1} dt = e^0 = 1 = \Delta(f)$$

la verifica del risultato è operata grazie al calcolo della  $\mathcal{F}^{-1}$ :

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df = \delta(t)$$

x3) SINUSOIDE

$$o(t) = A \sin \omega_0 t, \text{ con } \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}, \text{ per cui:}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left( \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt +$$

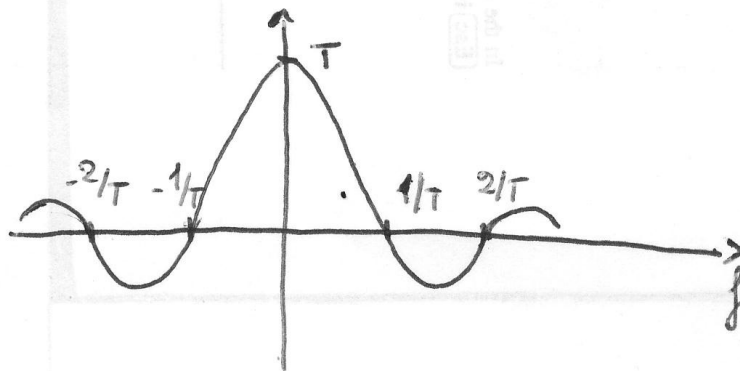
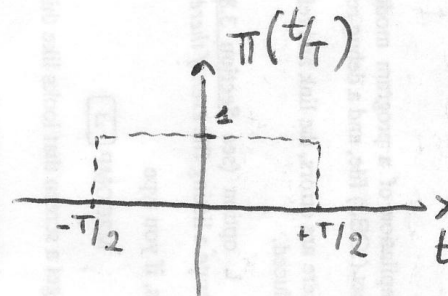
$$-\frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \Rightarrow V(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

utilizzando la trasformata delle  $\delta$  di Dirac e la proprietà di trasl. frequenz.

#### 4) IMPULSO RETTANGOLARE :

DIM

$$\pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & , -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} = \end{aligned}$$

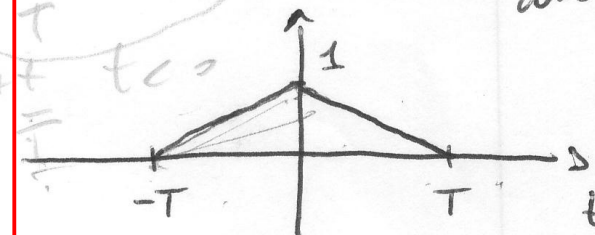
$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T \cdot \text{sinc}(\omega T/2) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$$

Com

$$\text{sinc}(x) \triangleq \text{sax}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$$

## 5) IMPULSO TRIANGOLARE

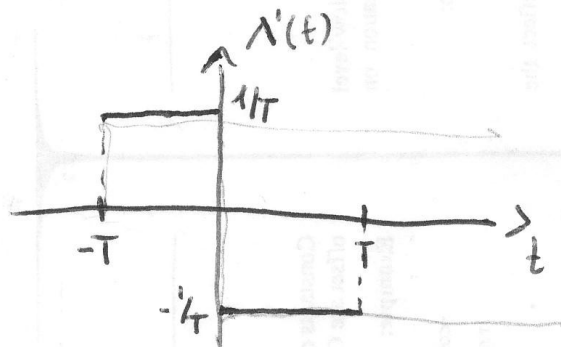
$$g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



Calcolando la derivata si ha:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \begin{cases} -1/T & 0 < t < T \\ 1/T & -T < t < 0 \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$= \frac{1}{T} [u(t+T)] - \frac{2}{T} u(t) + \frac{1}{T} [u(t-T)]$$



derivando ulteriormente:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T)$$

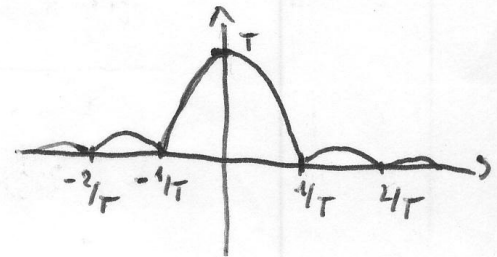
la cui trasformata è:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T} e^{j\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-j\omega T} = \frac{1}{T} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})^2 =$$

$= -\frac{4}{T} (\sin \pi f T)^2$  da cui, applicando due volte la proprietà di

integrazione:

$$g(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{T} \frac{(\sin \pi f T)^2}{(j2\pi f)^2} = T \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$

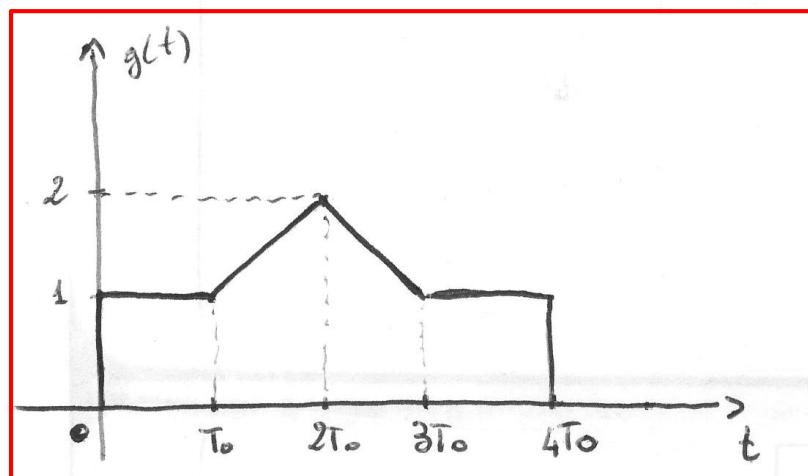




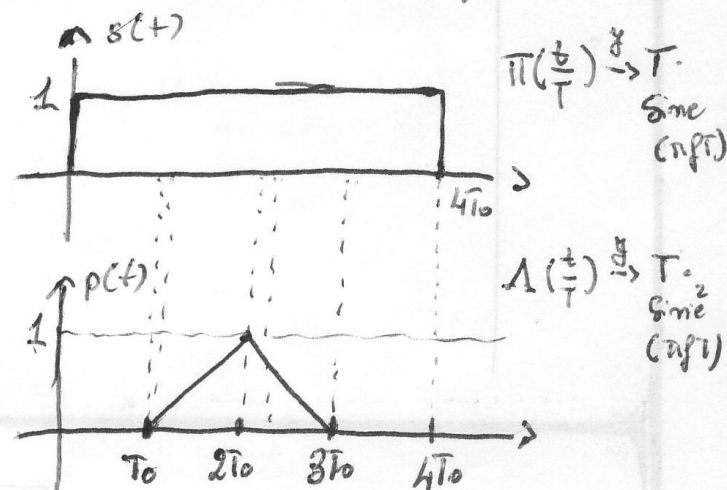
# 7) ESERCIZIO :

2010

Dato il segnale  $g(t)$  come in figura, calcolarne lo spettro :



⇒



Possiamo immaginare  $g(t) = s(t) + p(t)$  :  $s(t)$  è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria, di durata  $4T_0$  e traslato di  $2T_0$ , cioè  $s(t) = \Pi\left(\frac{t-2T_0}{4T_0}\right)$  mentre  $p(t)$  rappresenta un impulso triangolare di ampiezza unitaria, di durata  $2T_0$  e traslato di  $2T_0$ , ovvero  $p(t) = \Lambda\left(\frac{t-2T_0}{T_0}\right)$ . La trasformata può essere facilmente voluta ricorrendo alle proprietà di linearità e di traslazione temporale, perciò :

$$w(t - T_d) \xrightarrow{\mathcal{F}} W(f) e^{-j\omega T_d}$$

$$S(f) = 4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0} \quad e \quad P(f) = T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0}$$

per cui :

$$W(f) = \underbrace{[4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi f T_0) + T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_0)]}_{\text{spettro delle ampiezze}} e^{-j\underbrace{4\pi f T_0}_{\text{fase}}}$$

spettro delle ampiezze

### ESSEMPIO (6)

CALCOLARE LO SVILUPPO IN SERIE DI:

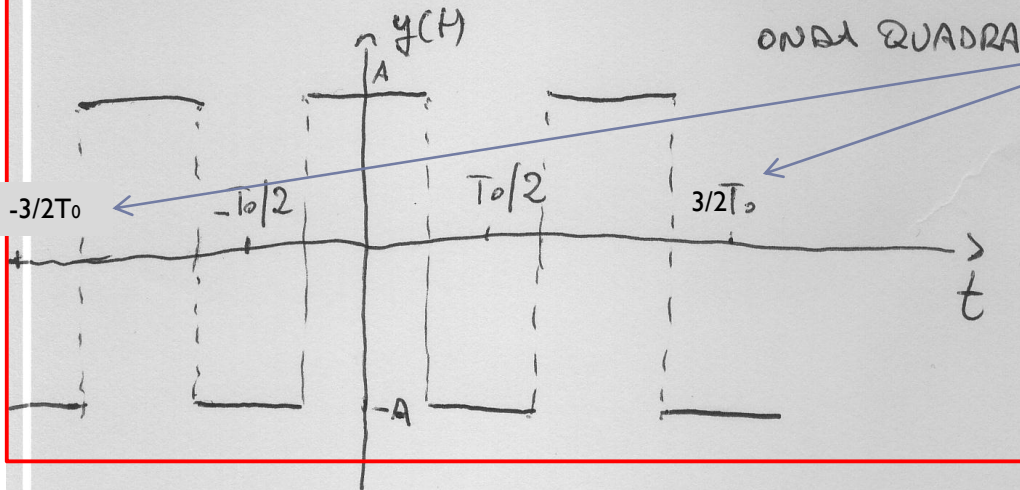
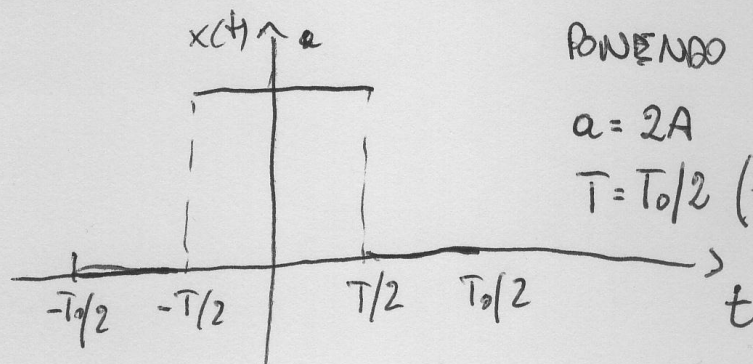


GRAFICO  
CORRETTO

DALL'ESSEMPIO 3) RICORDANDO:

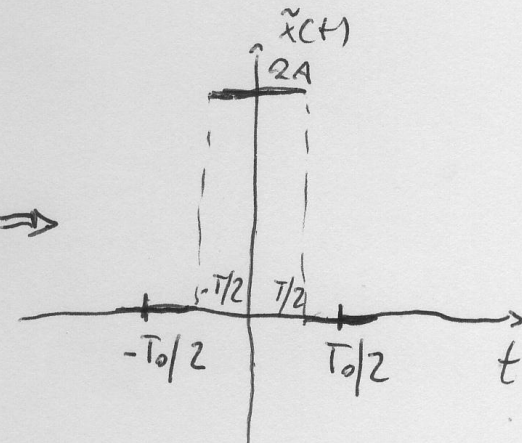


PONENDO

$$a = 2A$$

$$T = T_0/2 \quad (\delta = 1/2)$$

SI OTTIENDE  $\Rightarrow$



SOTTRAENDO LA QUANTITA' A SI HA:

$$y(t) = x(t) - A$$



$$y(t) = x(t) - A$$

PER LA PROPRIETA DI LINEARITA' LO SVILUPPO SARA' LA SOMMA DEI DUE

SVILUPPI:

per  $x(t) \Rightarrow X_k = a \delta \operatorname{sinc}(\kappa \delta) = 2A \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(\frac{\kappa}{2}) = A \operatorname{sinc}(\frac{\kappa}{2})$  per  $a = 2A$  e  $\delta = 1/2$

per  $h(t) = A \Rightarrow H_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A e^{-j2\pi \kappa f t} dt =$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{-j2\pi \kappa f} e^{-j2\pi \kappa f t} \bigg|_{-T_0/2}^{T_0/2} = -\frac{A}{2j \cdot \pi \kappa} \left[ e^{-j2\pi \kappa f T_0/2} - e^{+j2\pi \kappa f T_0/2} \right]$$

$$= \frac{A}{\pi \kappa} \cdot \frac{1}{2j} \left[ e^{j\pi \kappa} - e^{-j\pi \kappa} \right] = \frac{A}{\pi \kappa} \sin(\pi \kappa) = A \operatorname{sinc}(\pi \kappa)$$

$A \operatorname{sinc}(\kappa) \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_k = A \text{ per } k=0$$

$$H_k = 0 \quad \forall k \neq 0$$

$$\Rightarrow y_k = \begin{cases} X_k - H_k & k=0 \\ X_k & k \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$y_k = \begin{cases} X_0 - H_0 & k=0 \\ X_k & k \neq 0 \end{cases}$$

$$X_0 = A \operatorname{sinc}(0) = A$$

$$H_0 = A$$

$\Rightarrow$

```
%Numero di campioni per raffigurare il segnale
```

```
N=51; %
```

```
%Numero di armoniche da utilizzare per lo sviluppo
```

```
K=100;
```

```
%Limite inferiore scala dei tempi
```

```
tempoNormMin=-1.0;
```

```
%Limite superiore scala dei tempi
```

```
tempoNormMax=1.0;
```

```
%Scala dei tempi (come vettore)
```

```
tempo=linspace(tempoNormMin,tempoNormMax, N*(tempoNormMax-tempoNormMin));
```

```
componenteContinua = 0.5; %X0=0.5
```

```
%Vettore indici k
```

```
k=(1:2:K);
```

```
%Vettore dei coefficienti Xk per ogni k
```

```
coeff=2*pi*(-1).^((k-1)/2)./k;
```

```
%Vettore dei coseni per ogni k
```

```
coseni=cos(2*pi*tempo'*k);
```

```
%funzione di sintesi
```

```
xApprossimante=componenteContinua+sum(coseni*coeff',2);
```

```
plot (tempo,xApprossimante)
```

```
grid on
```

---

```
%in Hertz (Hz)
```

```
fsample=44.1e3;
```

```
durata = 20;
```

```
numCampioni=durata*fsample;
```

```
%lettura da file (estrazione di numCampioni dal file audio)
```

```
xs=wavread('ondasinK300700Hz.wav',numCampioni);
```

```
%da stereo otteniamo il mono (sx channel)
```

```
%xms=(x(:,1)); %remmato perchè è già segnale monofonico
```

```
xms=xs;
```

```
%fft length
```

```
fftlength=2^(nextpow2(numCampioni/30));
```

```
X=(fft(xms,fftlength));
```

```
%X=(fft(xms,fftlength));
```

```
X1=[X(1:fftlength/2) X(fftlength/2+1:fftlength)];
```

```
%plot(abs(X1));
```

```
plot(abs(X1(:,1)));
```